

# PC\* 1 : Programme de colles de mathématiques n°17

Semaine du 10 mars 2025 au 14 mars 2025

## Calcul différentiel

**Attention!** Les conditions d'extrema d'ordre 2, ainsi que des exemples d'utilisation de la compacité garantir l'existence d'extrema ne seront vus que...mardi matin!

**Questions de cours** Pas de questions de cours

### Programme de PC

#### A - Dérivabilité des fonctions vectorielles

L'objectif de cette section est de généraliser aux fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  la notion de dérivée d'une fonction numérique.

Toutes les fonctions sont définies sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ .

#### CONTENUS

#### CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Dérivabilité en un point.

Dérivabilité sur un intervalle.

Définition par le taux d'accroissement, caractérisation par le développement limité d'ordre un.

Traduction par les coordonnées dans la base canonique. Interprétation cinématique.

Combinaison linéaire de fonctions dérivables.

Dérivée de  $L(f)$ , où  $L$  est linéaire et  $f$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ .

Dérivée de  $B(f, g)$ , où  $B$  est bilinéaire, de  $M(f_1, \dots, f_p)$ , où  $M$  est  $p$ -linéaire, et  $f, g, f_1, \dots, f_p$  à valeurs vectorielles.

Dérivée de  $f \circ \varphi$  où  $\varphi$  est à valeurs réelles et  $f$  à valeurs vectorielles.

Fonction de classe  $\mathcal{C}^k$ , de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur un intervalle.

La démonstration n'est pas exigible.

Application au produit scalaire et au déterminant.

## B - Fonctions de plusieurs variables

Les dérivées partielles d'une fonction numérique définie sur un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  ont été introduites en première année. L'objectif de cette section est d'approfondir et de généraliser cette étude aux fonctions de  $p \geq 2$  variables. L'étude d'une fonction de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}^n$  se ramenant à celle de ses coordonnées, cette section se consacre à l'étude des fonctions de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}$ . Elle est axée sur la mise en place d'outils permettant de traiter des applications du calcul différentiel à l'analyse et la géométrie. On se limite en pratique au cas  $p = 2$  ou  $p = 3$ .

### CONTENUS

### CAPACITÉS & COMMENTAIRES

#### a) Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Dérivée en un point selon un vecteur.

Notation  $D_v f(a)$ .

Dérivées partielles d'ordre 1 en un point d'une fonction définie sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^p$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Notation  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ . On peut aussi utiliser  $\partial_i f(a)$ .

Une fonction est dite de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Omega$  si ses dérivées partielles d'ordre 1 existent et sont continues sur  $\Omega$ .

Opérations sur les fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Omega$  admet en tout point  $a$  de  $\Omega$  un développement limité d'ordre 1.

La démonstration n'est pas exigible.

Différentielle de  $f$  en  $a$ .

Une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Omega$  est continue sur  $\Omega$ .

Elle est définie comme la forme linéaire sur  $\mathbb{R}^p$  :

$$df(a) : (h_1, \dots, h_p) \mapsto \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i.$$

Notation  $df(a) \cdot h$ .

#### b) Règle de la chaîne

Dérivée de  $t \mapsto f(x_1(t), \dots, x_p(t))$ .

Application au calcul des dérivées partielles de :

$$(u_1, \dots, u_n) \mapsto f(x_1(u_1, \dots, u_n), \dots, x_p(u_1, \dots, u_n)).$$

En pratique, on se limite à  $n \leq 3$  et  $p \leq 3$ .

Les étudiants doivent connaître le cas particulier des coordonnées polaires.

Caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert convexe.

#### c) Gradient

Dans  $\mathbb{R}^p$  muni de sa structure euclidienne canonique, gradient d'une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Le gradient est défini par ses coordonnées.

Pour  $h \in \mathbb{R}^p$ , relation  $df(a) \cdot h = \langle \nabla f(a), h \rangle$ .

Notation  $\nabla f(a)$ .

Interprétation géométrique du gradient : si  $\nabla f(a) \neq 0$ , il est colinéaire au vecteur unitaire selon lequel la dérivée de  $f$  en  $a$  est maximale, et de même sens.

#### d) Fonctions de classe $\mathcal{C}^2$

Dérivées partielles d'ordre 2 d'une fonction définie sur un ouvert de  $\mathbb{R}^p$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Notations  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ .

Fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur un ouvert de  $\mathbb{R}^p$ .

Théorème de Schwarz.

La démonstration est hors programme.

Matrice hessienne en un point  $a$  d'une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur un ouvert de  $\mathbb{R}^p$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Notation  $H_f(a)$ .

Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 :

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) + \nabla f(a)^\top h + \frac{1}{2} h^\top H_f(a) h + o(\|h\|^2).$$

La démonstration est hors programme.

Expression en termes de produit scalaire.

#### e) Extremums d'une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$

Extremum local, global.

Point critique d'une application de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Si une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert de  $\mathbb{R}^p$  admet un extremum local en un point  $a$ , alors  $a$  est un point critique.

Si  $f$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur un ouvert de  $\mathbb{R}^p$  et  $a$  un point critique de  $f$  :

- si  $H_f(a) \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$ , alors  $f$  atteint un minimum local strict en  $a$ ;
- si  $H_f(a) \notin \mathcal{S}_p^+(\mathbb{R})$ , alors  $f$  n'a pas de minimum en  $a$ .

Adaptation à l'étude d'un maximum local.  
Explicitation pour  $p = 2$  (trace et déterminant).

Exemples de recherche d'extremums globaux sur une partie de  $\mathbb{R}^p$ .

## Extrait du programme de Sup

### Fonctions de deux variables

#### b) Dérivées partielles

Dérivées partielles en un point d'une fonction  $f$  définie sur un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert.

Développement limité à l'ordre 1 au point  $(x_0, y_0)$  d'une fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k + o(\|(h, k)\|).$$

Gradient d'une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Expression du développement limité à l'aide du gradient.

Notations  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ . L'existence des dérivées partielles n'entraîne pas la continuité.

Définition par la continuité des dérivées partielles.

La notion de fonction différentiable est hors programme.

Démonstration hors programme.

On met en évidence l'idée de l'approximation linéaire de  $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$  et l'interprétation de

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

comme équation du plan tangent en  $(x_0, y_0)$  à la surface d'équation  $z = f(x, y)$ .

Notation  $\nabla f(x_0, y_0)$ .

Le gradient de  $f$  en  $(x_0, y_0)$  définit la direction dans laquelle  $f$  croît le plus vite.